

# TEMPERATURVERTEILUNGEN IN DER TURBULENTEN GRENZSCHICHT AN DER EBENEN PLATTE†

J. C. ROTTA

Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen

(Eingegangen 25 Juni 1963)

**Zusammenfassung**—Der Einfluss der turbulenten Prandtl-Zahl (Verhältnis der Austauschkoefizienten für Impuls and Wärme) auf die Temperaturverteilungen in der turbulenten Grenzschicht an der ebenen Platte bei inkompressibler Strömung wird rechnerisch untersucht. Für die beiden Fälle "Eigenerwärmung" und "Wärmeübertragung bei konstanter Wandtemperatur" werden die Wandgesetze und die Temperaturverteilungen im äusseren Grenzschichtteil bei beliebigen Verteilungen der turbulenten Prandtl-Zahl angegeben und Wärmeübertragungszahl und Recovery-Faktor berechnet. Die Ergebnisse werden diskutiert.

### BEZEICHNUNGEN

$x, y,$	Koordinaten, $x$ in Strömungsrichtung, $y$ senkrecht zur Wand;	$\delta,$	Grenzschichtdicke;
$U, V,$	mittlere Geschwindigkeitskomponenten;	$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right) dy,$	Verdrängungsdicke;
$u, v, w,$	Komponenten der Geschwindigkeitsschwankungen;	$u_\tau,$	Schubspannungsgeschwindigkeit;
$T,$	mittlere Temperatur;	$t_q,$	Wärmestromtemperatur;
$\vartheta,$	Temperaturschwankungen;	$c_f = 2 \left(\frac{u_\tau}{U_\infty}\right)^2 = 2\omega^2,$	örtlicher Reibungsbeiwert;
$T_e,$	Eigentemperatur der Wand;	$St,$	Wärmeübergangszahl (Stanton-Zahl);
$T_s,$	mittlere Gesamttemperatur, Gl. (6.9);	$r,$	Recovery-Faktor;
$p,$	Druckschwankungen;	$E,$	Gesamtdissipation;
$\rho,$	Dichte;	$\epsilon,$	turbulente Dissipation;
$\mu, \nu = \mu/\rho,$	Zähigkeit, kinematische Zähigkeit;	$F,$	Geschwindigkeitsverlustfunktion;
$\lambda,$	Wärmeleitzahl;	$\Phi,$	dimensionslose Verteilungsfunktion der Temperatur bei Wärmeübertragung;
$c_p,$	Spezifische Wärme bei konstantem Druck;	$\Psi,$	dimensionslose Verteilungsfunktion der Temperatur durch Eigenerwärmung;
$Pr,$	Prandtl-Zahl;	$\varphi,$	dimensionslose Verteilungsfunktion der Schubspannung;
$\sigma_t,$	turbulente Prandtl-Zahl;	$a \left(\frac{Pr}{\sigma_{tw}}\right), b \left(\frac{Pr}{\sigma_{tw}}\right),$	Konstanten der Temperaturwandgesetze;
$\tau,$	Schubspannung;	$A(F), B(F),$	Temperaturzusatzverteilungen;
$q,$	Wärmefluss, positiv bei Wärmefluss in Richtung auf die Wand;		

† Auszugsweise vorgetragen auf der GAMM-Tagung Karlsruhe, April 1963.

$A_0, B_0,$	Werte von $A(F)$ und $B(F)$ für $y \rightarrow 0$ .
Indices	
$w,$	Wand;
$\infty,$	Rand der Grenzschicht.

### 1. EINLEITUNG

ÜBER Wärmeübertragung und Temperaturverteilung in turbulenten Grenzschichten bei inkompressibler Strömung sind viele theoretische und experimentelle Arbeiten bekannt geworden, und es liegen brauchbare Abschätzungsformeln vor. Indessen interessiert man sich auch für weitergehende Fragen, z.B. für die Wärmeübertragung bei hohen Mach-Zahlen, wenn die Temperatur- und Geschwindigkeitsverteilungen in wechselseitiger Beziehung stehen, ferner wenn bei extrem hohen Temperaturen chemische Reaktionen auftreten, sowie wenn zur Kühlung ein Fremdgas aus der Oberfläche in die Grenzschicht einströmt (Zweistoff-Grenzschichten). Will man die theoretische Behandlung derartiger Fragen in Angriff nehmen, so muss man sich auf Erfahrungen stützen, die man im einfachen Fall inkompressibler Strömung gesammelt hat. In jedem Fall ist es wichtig, dass man die Vorgänge bei der Wärmeübertragung in inkompressibler Strömung möglichst genau verstanden hat. Einen Beitrag hierzu zu liefern, ist das Ziel der vorliegenden Arbeit. Sie stellt eine Teiluntersuchung im Rahmen eines grösseren Forschungsprogrammes über Grenzschichten mit Wärmeübertragung dar.

### 2. AUFGABENSTELLUNG

Es werden nur so kleine Temperaturdifferenzen zugelassen, dass sie die Stoffwerte (Dichte  $\rho$ , Zähigkeit  $\mu$ , Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ , spezifische Wärme  $c_p$ ) nicht nennenswert beeinflussen. Die Strömung bleibt dann von der Temperaturverteilung unabhängig. Wir nehmen deshalb die Geschwindigkeitsverteilung als bekannt an und setzen nur voraus, dass diese Geschwindigkeitsverteilung die Strömungsgleichungen befriedigt, d.h. eine Lösung der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen hinreichend genau annähert.

Die Aufgabenstellung beginnt mit der Frage: Was muss man wissen, um bei gegebener

Verteilung der gemittelten Geschwindigkeit die Temperaturverteilungen berechnen zu können. Nun, vor allem muss man über den Wärmetransport in turbulenter Strömung etwas wissen. Es liegen theoretische und experimentelle Untersuchungen hierüber vor; die praktische Behandlung von Aufgaben der vorliegenden Art geht von der durch Erfahrung gestützten Erkenntnis aus, dass der Transport von Wärme ähnlich dem von Impuls abläuft. Der Transport von Impuls quer zur Wand wird durch die scheinbare Schubspannung  $\tau_t = -\rho \overline{uv}$  beschrieben, der Transport von Wärme durch den turbulenten Wärmefluss  $q_t = -c_p \rho \overline{v\vartheta}$ , wobei  $u$  und  $v$  die Schwankungen der Geschwindigkeiten in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung,  $\vartheta$  die Temperaturschwankungen,  $\rho$  die Dichte und  $c_p$  die spezifische Wärme bei konstantem Druck sind. Aus der Ähnlichkeit der Transporterscheinungen folgt die Beziehung

$$\frac{\tau_t}{q_t} = \frac{-\rho \overline{uv}}{-c_p \rho \overline{v\vartheta}} = \sigma_t \frac{\partial U/\partial y}{\partial T/\partial y}, \quad (2.1)$$

mit  $U$  = mittlere Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung,  $T$  = mittlere Temperatur und  $y$  = Abstand von der Wand.

In (2.1) ist  $\sigma_t$  eine dimensionslose Grösse, die man als turbulente Prandtl-Zahl bezeichnet (in Anlehnung an die Prandtl-Zahl  $Pr = c_p \mu / \lambda$  der molekularen Transporterscheinungen).† Die scheinbare Schubspannung kann man aus dem Kräftegleichgewicht berechnen, wenn die Geschwindigkeitsverteilung gegeben ist. Falls auch  $\sigma_t$ , das im allgemeinen eine Funktion des Ortes sein wird, bekannt ist, enthält das Gleichungssystem für  $T$ , das aus Energiegleichung und (2.1) besteht, keine wesentlichen Unbestimmtheiten

† Unter Verwendung von Austausch-Ansätzen  $\tau_t = A_r \partial U/\partial y$  und  $q_t = A_q \partial T/\partial y$  ist  $\sigma_t = A_r/A_q$  das Verhältnis der Austauschgrössen. Die Austauschansätze selbst werden jedoch nicht benötigt. Die physikalische Grundlage von (2.1) ist der Umstand, dass die  $u$ - und  $\vartheta$ -Schwankungen im grossen ähnlichen Gesetzen unterliegen. Das Vorhandensein von Gradienten  $\partial U/\partial y$  und  $\partial T/\partial y$  ruft deshalb eine starke Korrelation zwischen den  $u$ - und  $\vartheta$ -Schwankungen hervor; die Grössen der Schwankungen stehen im gleichen Verhältnis zueinander wie die Gradienten. Aus der gleichzeitigen Korrelation zwischen  $u$  und  $v$  kann man dann auf die Korrelation zwischen  $\vartheta$  und  $v$  schliessen.

mehr, so dass die Temperaturverteilungen mit guter Näherung berechnet werden können.

Man kann  $\sigma_t$  nur aus gleichzeitigen Messungen von Temperatur- und Geschwindigkeitsverteilung bestimmen, und dabei sind die Ergebnisse gewöhnlich ziemlich ungenau, denn die Ermittlung der Differentialquotienten  $\partial U/\partial y$  und  $\partial T/\partial y$  aus den gemessenen Verteilungen ist stets mit Unsicherheit behaftet. Nach vorliegenden Auswertungen scheint  $\sigma_t$  immer zwischen 1/2 und 1 zu liegen. Die zuverlässigsten Werte, die aus der Eigenerwärmung der Strömung in einem Rohr ermittelt wurden, stammen wohl von H. Ludwig [1] Man weiss aber nicht, wie weit man diese Werte bei Grenzschichten und im Fall der Wärmeübertragung anwenden darf. Für die Wärmeübertragung in der Grenzschicht liegt ein Versuchergebnis von Johnson [2] vor, das mit den Ludwigschen Angaben verträglich ist; die einzelnen Versuchspunkte streuen jedoch erheblich.

Die Versuchsergebnisse sind also lückenhaft. Daneben darf man auch den Näherungscharakter von (2.1) nicht übersehen. Die turbulenten Transportvorgänge werden z.B. nicht nur durch die örtlichen Gradienten  $\partial U/\partial y$  und  $\partial T/\partial y$ , sondern auch mit durch die höheren Ableitungen bestimmt. Also selbst wenn man zuverlässige Daten von  $\sigma_t$  hat, wird bei Übertragung auf andere Fälle eine gewisse Unsicherheit in die Rechnung einfließen. Diese Argumente legen nahe, das Problem einmal umzukehren und zu fragen: Wie wirken sich verschiedene Annahmen über  $\sigma_t$  auf die Temperaturverteilungen und den Wärmeübergang aus? Zur Beantwortung dieser Fragen sollen die Temperaturverteilungen, Eigentemperaturen und Wärmeübergangszahlen für verschiedene Verteilungen von  $\sigma_t$  berechnet werden.

Wegen der eingeführten Beschränkungen auf kleine Temperaturdifferenzen ist die Energiegleichung linear in  $T$ , so dass man die Gesamtlösung aus Teillösungen aufbauen kann. Im folgenden sollen zwei kennzeichnende Fälle dieser Teillösungen behandelt werden. Der erste ist die Eigenerwärmung, die sich bei wärmeisolierter Oberfläche einstellt (auch Thermometerproblem genannt). Praktisches Interesse hat diese Verteilung nur bei grossen Geschwindigkeiten. Da es sich im Vorliegenden um eine

grundsätzliche Untersuchung handelt, gibt sie auch bei den in Frage stehenden kleinen Geschwindigkeiten Aufschlüsse und führt zur Bestimmung des Recovery-Faktors

$$r = \frac{2c_p(T_e - T_\infty)}{U_\infty^2}, \quad (2.2)$$

wobei  $T_e$  die Eigentemperatur der Oberfläche,  $T_\infty$  und  $U_\infty$  Temperatur und Geschwindigkeit ausserhalb der Grenzschicht sind.

Als zweiter Fall soll der Wärmeübergang untersucht werden, wenn die Wandtemperatur  $T_w$  die Eigentemperatur um einen konstanten Betrag überschreitet. Diese Temperaturverteilung ergibt die Wärmeübergangszahl oder Stanton-Zahl für gleichmässige Erwärmung der Wand

$$St = \frac{-q_w}{c_p \rho U_\infty (T_w - T_e)}. \quad (2.3)$$

### 3. ENERGIEGLEICHUNG

Die Temperaturverteilungen müssen der Energiegleichung genügen, die mit den Grenzschichtvereinfachungen für turbulente Grenzschichten an der ebenen Platte

$$c_p \rho \left( U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( -c_p \rho \overline{v\theta} + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \rho E + \frac{\partial \overline{vp}}{\partial y} \quad (3.1)$$

lautet, wobei  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit und  $p$  die Druckschwankungen sind. Diese Gleichung gilt speziell für Strömungen idealer Gase bei verschwindender Mach-Zahl. Die Dissipation  $E$  der Masseneinheit setzt sich additiv aus der direkten Dissipation  $\nu(\partial U/\partial y)^2$ , die nur in Wandnähe wichtig ist, und der turbulenten Dissipation  $\epsilon$  zusammen:

$$E = \nu \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \epsilon, \quad (3.2)$$

wobei  $\nu = \mu/\rho$  die kinematische Zähigkeit ist. Die turbulente Dissipation soll aus der Gleichung für den Energiehaushalt der Turbulenzbewegung ermittelt werden. Diese Gleichung hat die Form (vgl. [3])

$$\frac{1}{2} \left( U \frac{\partial \overline{q^2}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{q^2}}{\partial y} \right) + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \overline{vq^2} + \overline{vp}/\rho \right) + \epsilon - \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{2} \overline{q^2} + \overline{v^2} \right) = 0, \quad (3.3)$$

wobei hier  $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$  gesetzt wurde. Es treten hierbei mehrere Turbulenzglieder auf, über die man ohne weiteres nichts aussagen kann; nur  $\overline{uw}$  lässt sich aus der mittleren Geschwindigkeitsverteilung berechnen. Um einen Überblick zu vermitteln, sind in Bild 1 die einzelnen Glieder von (3.3) dargestellt, wie sie

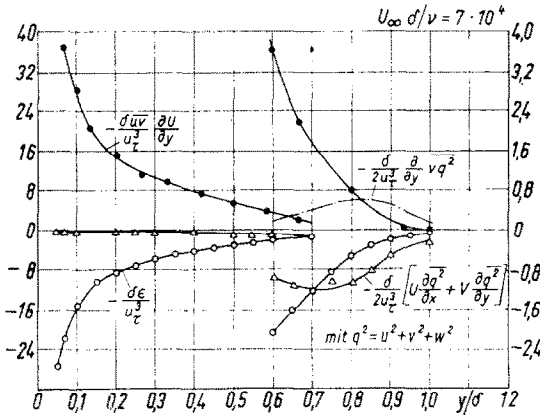


BILD 1. Zum Energiegleichgewicht der Turbulenzbewegung.

sich aus Messungen von Klebanoff [4] ergeben. Dabei wurde zur Verdeutlichung bei den grösseren  $y/\delta$ -Werten der Ordinatenmassstab zehnfach vergrössert. Der konvektive Transport von kinematischer Schwankungsenergie, durch den ersten Klammerausdruck von (3.3) dargestellt, und der Energietransport durch turbulente Diffusion, ausgedrückt durch das dritte Glied, werden nur im äussersten Teil der Grenzschicht wichtig und halten sich annähernd die Waage. Bei der turbulenten Diffusion interessiert hier nur der Anteil  $\frac{1}{2} \overline{vq^2}/\partial y$ ,† da die "Druckdiffusion"  $\overline{\partial vp}/\partial y$  in (3.1) wie auch in (3.3) additiv neben der Dissipation erscheint. Der durch das letzte Glied auf der linken Seite von (3.3) beschriebene Energietransport durch die Zähigkeit bekommt nur in der Unterschicht nennenswerte Grösse. Fast über die ganze Grenzschicht wird die Dissipation  $\epsilon$  zum grösseren Teil durch die Arbeit der scheinbaren Schubspannung  $-\overline{uw} \partial U/\partial y$  kompensiert. Je

† Dieses Glied wurde auf Grund der gemessenen Geschwindigkeitsschwankungen und des Intermittenzfaktors abgeschätzt, vgl. [3] S. 93 ff.

näher man der Wand kommt, umso grösser werden diese beiden Glieder. Die Arbeit der scheinbaren Schubspannungen erreicht im Abstand  $y/\delta = 0,005$  ihren Grösstwert von 650 (in den Einheiten von Bild 1). In der Unterschicht dominiert die direkte Dissipation, sie hat an der Wand ihren Grösstwert von 2600. Angesichts dieser Verhältnisse erscheint es als gerechtfertigt, bei der Berechnung der Temperaturverteilungen die turbulente Dissipation plus Druckdiffusion gleich der Arbeit der scheinbaren Schubspannung anzunehmen, also

$$E + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{vp}}{\partial y} = \left( v \frac{\partial U}{\partial y} - \overline{uw} \right) \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.4)$$

zu setzen. Damit bekommt die Energiegleichung die Form

$$c_p \rho \left( U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( -c_p \rho \overline{v\theta} + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \rho \left( v \frac{\partial U}{\partial y} - \overline{uw} \right) \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.5)$$

Ermittelt man  $\overline{uw}$  aus der Geschwindigkeitsverteilung (vgl. Abschnitt 4) und gibt in Gl. (2.1)  $\sigma_t$  als Funktion von  $y$  vor, so tritt als einzige Unbekannte die Temperatur  $T$  auf.

Im Falle der Eigenerwärmung lauten die Randbedingungen:

$$y = 0: \partial T/\partial y = 0; \quad y \rightarrow \infty: T = T_\infty.$$

Bei der Wärmeübertragung von der Platte an die Strömung (oder umgekehrt) kann man Lösungen der homogenen Differentialgleichung von (3.5) verwenden:

$$c_p \rho \left( U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( -c_p \rho \overline{v\theta} + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (3.6)$$

Für den hier betrachteten Fall sind die zugehörigen Randbedingungen:

$$y = 0: T = T_w = \text{konst.}; \quad y \rightarrow \infty: T = T_\infty.$$

Damit ist die Aufgabe auch mathematisch formuliert.

Temperaturverteilungen in turbulenten Grenzschichten mit veränderlicher Prandtl-Zahl wurden formal schon von van Driest [5] behandelt.

Dort werden die Integrale für den allgemeinen Fall angegeben, bei der weiteren Bearbeitung wird aber für die Schubspannungsverteilung eine Näherung eingeführt und numerisch nur der Fall konstanter Werte für  $Pr$  und  $\sigma_t$  ausgewertet. Van Driest erhält unter diesen Annahmen geschlossene Ausdrücke für Recovery-Faktor und die Wärmeübergangszahl. In der vorliegenden Arbeit wird auf geschlossene Lösungen geringer Wert gelegt; es werden deshalb keine weiteren Vereinfachungen eingeführt.

4. GESCHWINDIGKEITSVERTEILUNG

Die Verteilung der gemittelten Geschwindigkeit  $U$  wird in der Nähe der Wand durch das universelle Wandgesetz  $U = u_\tau f(yu_\tau/\nu)$  dargestellt, das ausserhalb der Unterschicht die Form

$$U = u_\tau [(1/\kappa) \ln(yu_\tau/\nu) + C] \quad (4.1)$$

hat. Im Aussenteil gilt das "Geschwindigkeitsverlustgesetz"

$$U_\infty - U = u_\tau F(y/\delta). \quad (4.2)$$

Dabei ist  $u_\tau = \sqrt{(\tau_w/\rho)}$  die Schubspannungsgeschwindigkeit,  $\kappa$  und  $C$  sind universelle Konstanten und  $f(yu_\tau/\nu)$  und  $F(y/\delta)$  dimensionslose Funktionen von  $yu_\tau/\nu$  bzw.  $y/\delta$ , die für die Grenzschicht an der ebenen, glatten Platte als universell angesehen werden können. Die wegen (2.1) benötigte Verteilung der scheinbaren Schubspannung lässt sich durch

$$-\overline{\rho u v} = \tau_w \varphi(y/\delta) \quad (4.3)$$

ausdrücken; sie wird aus der Grenzschichtgleichung

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\overline{u v} + \nu \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (4.4)$$

und der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (4.5)$$

ermittelt. Setzt man (4.2) und (4.3) in (4.4) und (4.5) ein, so ergibt die Integration mit  $\eta = y/\delta$  (vgl. [3])

$$\varphi(\eta) = 1 -$$

$$\frac{\int_0^\eta F d\eta' - \omega \int_0^\eta F^2 d\eta' - F(\eta - \omega \int_0^\eta F d\eta')}{\int_0^1 F d\eta - \omega \int_0^1 F^2 d\eta} \quad (4.6)$$

Dabei wurde für  $u_\tau/U_\infty = \sqrt{(c_f/2)} = \omega$  geschrieben. Diese Beziehung gilt für alle  $y$  ausserhalb der Unterschicht. Die den numerischen Rechnungen zugrunde gelegten Funktionen sind im Anhang gegeben.

5. WANDGESETZE FÜR DIE TEMPERATURVERTEILUNGEN

Ähnlich wie für die Geschwindigkeitsverteilung [vgl. (4.1)] gibt es bei kleinen  $y$ -Werten auch Wandgesetze für die Temperaturverteilungen, die auf der Voraussetzung beruhen dass die Glieder der linken Seiten von (4.4), (3.5) und (3.6) vernachlässigt werden können. Der allgemeinere Fall für kompressible turbulente Grenzschichten wurde vom Verfasser bereits behandelt [6]. Schon vorher hatte Reichardt [7] das Wandgesetz für den Fall der Wärmeübertragung angegeben. Daher können wir uns hier kurz fassen. Da sich die Gültigkeit der Wandgesetze nur auf eine sehr dünne Schicht an der Wand beschränkt, kann man die turbulente Prandtl-Zahl  $\sigma_t$  konstant gleich dem Wert  $\sigma_{tw}$  an der Wand setzen. Auch innerhalb der Unterschicht soll  $\sigma_t = \sigma_{tw}$  sein; dies ist zumindest die einfachste und nächstliegende Annahme. Tatsächlich ist über die Transportvorgänge in der Unterschicht nichts bekannt.

Bei dem Fall der Wärmeübertragung ist eine von Squire [8] eingeführte Grösse  $t_q$  zweckmässig, die den Namen "Wärmestromtemperatur" erhalten soll:

$$t_q = \frac{-q_w}{\rho c_p u_\tau} \quad (5.1)$$

Mit dieser Grösse lautet das Wandgesetz für die Temperatur infolge Wärmeübertragung (von der Wand auf die Strömung)

$$T = T_w - t_q \left[ \sigma_{tw} \frac{U}{u_\tau} + (Pr - \sigma_{tw}) a \left( \frac{Pr}{\sigma_{tw}} \right) \right] \quad (5.2)$$

Dabei ist  $a(Pr/\sigma_{tw})$  eine dimensionslose Grösse, die ausserhalb der Unterschicht nur eine Funktion des Verhältnisses  $Pr/\sigma_{tw}$  ( $= Pr'$ , allgemeine Prandtl-Zahl nach Reichardt [7]), also konstant, ist.

Für die Eigenerwärmung gilt das Temperaturwandgesetz

$$T = T_e - \sigma_{tw} \frac{U^2}{2c_p} - \frac{u_\tau^2}{2c_p} (Pr - \sigma_{tw}) b \left( \frac{Pr}{\sigma_{tw}} \right). \tag{5.3}$$

Dabei ist  $b(Pr/\sigma_{tw})$  ähnlich wie  $a(Pr/\sigma_{tw})$  in (5.2) dimensionslos und ausserhalb der Unterschicht nur von  $Pr/\sigma_{tw}$  abhängig. Bei gegebener Geschwindigkeitsverteilung in der Unterschicht können  $a(Pr/\sigma_{tw})$  und  $b(Pr/\sigma_{tw})$  durch Integration der vereinfachten Energiegleichung (3.5) bzw. (3.6) berechnet werden. Den in Bild 2 dargestellten Ergebnissen wurde eine Geschwindigkeitsverteilung nach der von van Driest [9] gegebenen Formel zugrunde gelegt (vgl. Anhang). Die Grössen  $a$  und  $b$  wurden dabei für  $Pr = 0,72$  (Luft) über  $\sigma_{tw}$  aufgetragen.

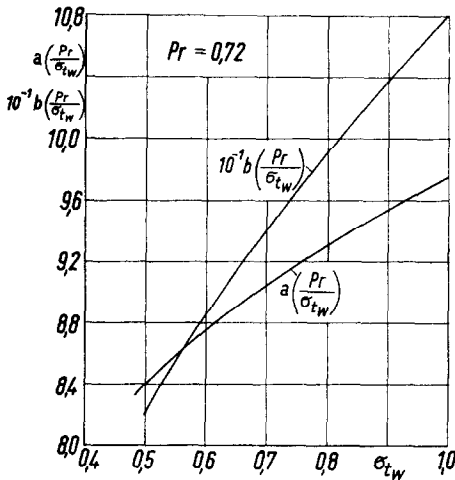


BILD 2. Konstanten der Temperaturwandgesetze Gl. (5.2) und (5.3).

6. ÄUSSERE TEMPERATURVERTEILUNGEN

Nach Einführung der Temperaturwandgesetze ist es ein logischer Schritt, für die Temperaturverteilungen im äusseren Grenzschichtteil dimensionslose Darstellungen zu wählen, die sich an das Geschwindigkeitsverlustgesetz (4.2) anlehnen. Die Wandtemperatur  $T_w$  darf dabei nicht auftreten. Solche Darstellungen sind für den Fall der Wärmeübertragung

$$\frac{T - T_\infty}{t_q} = \Phi(\eta) \tag{6.1}$$

und für die Eigenerwärmung

$$\frac{T - T_\infty}{u_\tau U_\infty / 2c_p} = \Psi(\eta). \tag{6.2}$$

Wenn man diese Ansätze und (2.1) sowie (4.3) einführt, lässt sich die Energiegleichung für die beiden Fälle integrieren. Dabei kann das Glied  $\lambda \partial T / \partial y$  fortgelassen werden, da die molekulare Wärmeleitung nur in der Unterschicht nennenswerte Grösse hat, vorausgesetzt die Prandtl-Zahl ist von der Grössenordnung 1. Ferner, da  $F$  eine feste Funktion von  $\eta$  ist, kann man  $\Phi$  und  $\Psi$  von (6.1) und (6.2) als Funktion von  $F$  ausdrücken. Die Herleitung geht ähnlich wie bei van Driest [5] und führt auf Formeln, die man direkt aus van Driests Gleichungen durch Umschreiben in unsere Funktionen gewinnen kann. Die Rechnungen im einzelnen können hier übergangen werden. Man erhält für die Wärmeübertragung

$$\Phi(F) = \int_0^F \sigma_t \exp \left[ \int_1^\varphi (\sigma_t - 1) \frac{d\varphi}{\varphi} \right] dF \tag{6.3}$$

und für die Energiegleichung

$$\Psi(F) = -2 \int_0^F \sigma_t \exp \left[ \int_1^\varphi (\sigma_t - 1) \frac{d\varphi}{\varphi} \right] \left\{ \omega \int_{1/\omega}^F \exp \left[ - \int_1^\varphi (\sigma_t - 1) \frac{d\varphi}{\varphi} \right] dF \right\} dF, \tag{6.4}$$

wobei  $d\varphi = (d\varphi/d\eta) d\eta$  ist. Bei dem Integral in der geschweiften Klammer, bei dem von der Wand aus integriert wird, ist zu bedenken, dass  $F$  für  $y \rightarrow 0$  logarithmisch unendlich wird. Andererseits wird aber  $U$  nirgends negativ; als untere Integrationsgrenze ist daher  $F_0 = (1/\omega)$  zu setzen ( $U = 0$ ).

Für die numerische Auswertung werden die Integrale in eine solche Form gebracht, dass sich Rechenungenauigkeiten wenig auswirken können. Auf diese Weise kann an Rechenaufwand gespart werden. Das führt auf die Formeln

$$\Phi(F) = \sigma_{tw} F + A(F) \tag{6.5}$$

$$\Psi(F) = \sigma_{tw}(2 - \omega F)F + B(F). \tag{6.6}$$

Die Temperaturverteilungen werden also aus zwei Anteilen zusammengesetzt, wobei der erste dem Wert der turbulenten Prandtl-Zahl an der Wand proportional ist. Es zeigt sich,

dass dieser Anteil in beiden Fällen den Hauptbeitrag liefert. Die Funktionen  $A(F)$  und  $B(F)$  enthalten die Einflüsse der Variation von  $\sigma_t$  mit  $\eta$ , und der Schubspannungsverteilung. Es ergibt sich

$$A(F) = \int_0^F \left\{ \sigma_t \exp \left[ \int_1^\varphi (\sigma_t - 1) \frac{d\varphi}{\varphi} \right] - \sigma_{tw} \right\} dF \quad (6.7)$$

$$B(F) = -2 \int_0^F \left( \sigma_t \exp \left[ \int_1^\varphi (\sigma_t - 1) \frac{d\varphi}{\varphi} \right] \left\{ \omega \int_{1/\omega}^F \exp \left[ - \int_1^\varphi (\sigma_t - 1) \frac{d\varphi}{\varphi} \right] dF \right\} - \sigma_{tw} (1 - \omega F) \right) dF. \quad (6.8)$$

Diese Funktionen und die Schubspannungsverteilung  $\varphi(\eta)$  wurden auf der IBM 650 berechnet.

In den Bildern 3a und b sind die Funktionen  $A$  und  $B$  für verschiedene Verteilungen von  $\sigma_t$

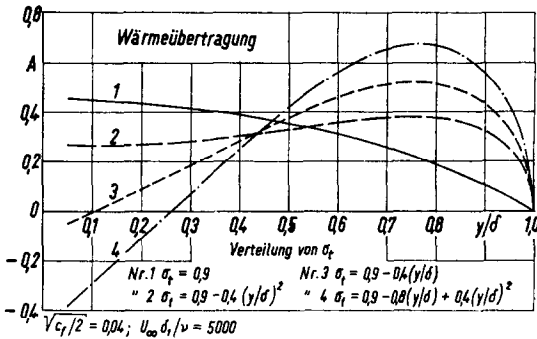


BILD 3a. Temperaturzusatzverteilungen. Einfluss der  $\sigma_t$ -Verteilung.

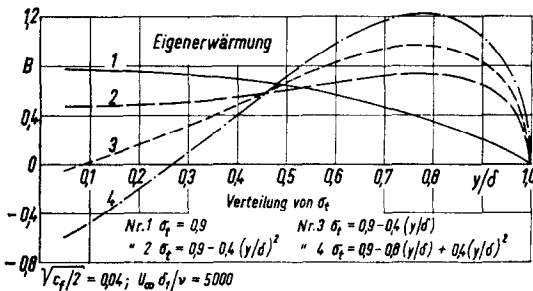


BILD 3b. Temperaturzusatzverteilungen. Einfluss der  $\sigma_t$ -Verteilung.

über  $y/\delta$  aufgetragen. Alle Verteilungen von  $\sigma_t$  beginnen bei  $y = 0$  mit einem Wert  $\sigma_{tw} = 0,9$  und nehmen nach aussen zu ab. Die konkave Verteilung Nr. 4 ist recht ausgefallen und in Praxis kaum zu erwarten. Den Versuchsergebnissen von Ludwig [1] und Johnson [2] kommt die  $\sigma_t$ -Verteilung Nr. 2 am nächsten. Die Funktionen  $A$  und  $B$  sind von  $\sqrt{(c_f/2)} (= \omega)$  abhängig. Aus Bild 4a und b ist zu entnehmen, dass diese

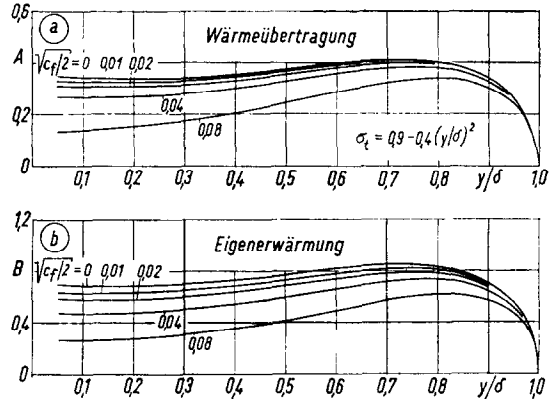


BILD 4a,b. Temperaturverteilungen. Einfluss des örtlichen Reibungsbeiwertes.

Abhängigkeit nur gering ist. Die in Bild 3 dargestellten Ergebnisse gelten für  $\sqrt{(c_f/2)} = 0,04$ , was bei glatter Oberfläche zu einer Reynolds-Zahl  $Re = U_\infty \delta_1/\nu = 5000$  gehört. Der Fall  $\sqrt{(c_f/2)} = 0$  entspricht  $Re = \infty$ , während  $\sqrt{(c_f/2)} = 0,08$  bei turbulenter Grenzschicht an glatter Wand nicht auftreten kann; er ist nur bei rauher Oberfläche möglich. Bemerkenswert ist auch die Ähnlichkeit der Funktionen  $A$  und  $B$ ;  $B$  ist rund doppelt so gross wie  $A$ .

Auf den folgenden fünf Bildern sind die äusseren Temperaturverteilungen für die erwähnten Fälle dargestellt. Bild 5 gibt  $\Phi$  als Funktion von  $F$  wieder, während in Bild 6  $\Phi$  über  $y/\delta$  aufgetragen ist. Der Grössenvergleich von  $\Phi$  mit den Verteilungen von  $A$  bestätigt, dass das erste Glied in (6.5) den Hauptanteil liefert. Man sieht auch, dass sich die verschiedenen Verteilungen von  $\sigma_t$  nicht so stark auf  $\Phi$  auswirken wie auf  $A$ , doch sind die Unterschiede nicht belanglos. Für  $\sigma_t = 1$  wird  $A = 0$  und  $\Phi = F$ ; dieser Fall ist ebenfalls in Bild 5 eingetragen.

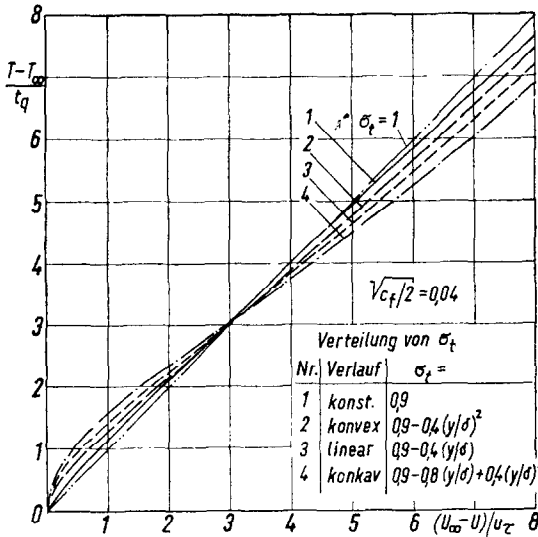


BILD 5. Äussere Temperaturverteilung bei Wärmeübertragung. Einfluss der  $\sigma_t$ -Verteilung.

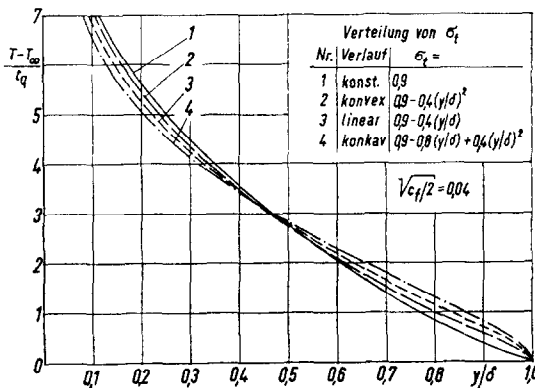


BILD 6. Äussere Temperaturverteilung bei Wärmeübertragung über  $y/\delta$ .

Eine Unschönheit der Rechenergebnisse tritt in Bild 6 zu Tage. Aus (6.3) folgt mit (4.6) durch einen Grenzübergang  $y \rightarrow \delta \Phi \sim F\sigma_{t\infty}$ , wobei  $\sigma_{t\infty}$  der Wert von  $\sigma_t$  am Rande der Grenzschicht ist. Für  $\sigma_{t\infty} < 1$  hat  $\Phi(F)$  deshalb bei  $F=0$  eine senkrechte Tangente. Das zugrunde gelegte Geschwindigkeitsprofil besitzt für  $y = \delta$  eine von Null verschiedene Neigung  $dU/dy = u_\tau/\kappa\delta$  [Anhang Gl. (A.2)];  $d\Phi$  deswegen weist auch  $\Phi$  in Bild 6 eine senkrechte Tangente bei  $y = \delta$  auf, wenn  $\sigma_{t\infty} < 1$  ist. In der wirklichen Grenzschicht nähert sich  $U$  asymptotisch

dem Wert  $U_\infty$ , damit geht auch  $T$ , über  $y$  aufgetragen, asymptotisch nach  $T_\infty$ . Die rechnerische Unrichtigkeit wirkt sich nur in der Umgebung von  $y = \delta$  aus und stellt lediglich einen Schönheitsfehler dar.

Der Einfluss von  $\sqrt{c_f/2}$  auf  $\Phi$  ist gering, Bild 7.

Bei der Eigenerwärmung vergleicht man am besten die Verteilung der Gesamttemperaturen

$$T_s = T + U^2/2c_p \quad (6.9)$$

miteinander. Aus (6.6) und (4.2) ergibt sich

$$\frac{c_p(T_s - T_{s\infty})}{\sqrt{c_f/2}U_\infty^2/2} = \frac{T_s - T_{s\infty}}{u_\tau U_\infty/2c_p} = (\sigma_{tw} - 1)(2 - \omega F)F + B(F). \quad (6.10)$$

Diese Funktion ist in Bild 8 über  $y/\delta$  aufgetragen. Die Verteilung  $2c_p(T_s - T_{s\infty})/U_\infty^2$  nimmt nur mässige Werte an, denn es ist in roher Näherung (für  $\sigma_t = 1$  genau)  $T_s = T_{s\infty} = \text{konst.}$  Der typische Verlauf hat seine Ursache darin, dass die Verteilung von  $T_s$  die Integralbedingung

$$\int_0^\infty U(T_s - T_{s\infty}) dy = 0 \quad (6.11)$$

erfüllen muss. Da die Eigentemperatur der Wand  $T_e$  kleiner als  $T_{s\infty}$  ist und sich deshalb in dem an die Wand angrenzenden Gebiet  $T_s < T_{s\infty}$

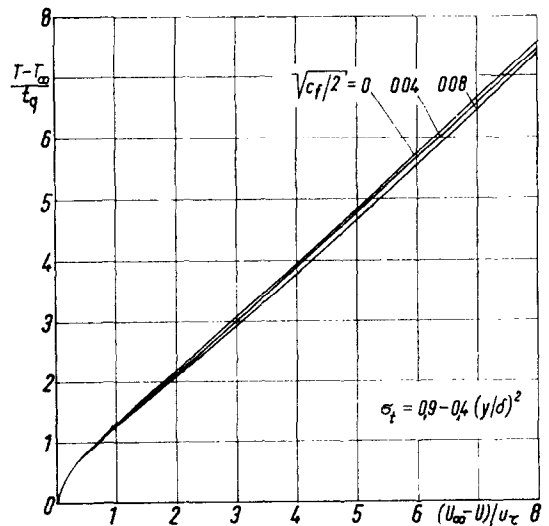


BILD 7. Äussere Temperaturverteilung bei Wärmeübertragung. Einfluss des örtlichen Reibbeiwertes.



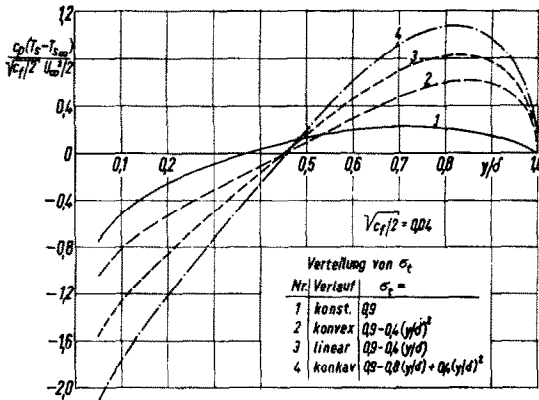


BILD 8. Verteilung der Gesamtemperatur durch Eigenerwärmung. Einfluss der  $\sigma_t$ -Verteilung.

ergibt, erfordert (6.11) in dem äusseren Gebiet  $T_s > T_{s\infty}$  Diese Erscheinung zeigt sich auch bei Versuchsergebnissen und wurde von Schubauer und Tschen [10] besprochen, ohne dass eine Erklärung gegeben wurde. Keine der bis jetzt bekannten Näherungsformeln für die Temperaturverteilung bringt dieses Verhalten zum Ausdruck.

Die beiden Summanden auf der rechten Seite von (6.10) haben gleiche Grössenordnung. Für die Gl. (6.6) gilt deshalb als Regel, dass der erste Summand den Hauptteil stellt. Auch hier tritt der erwähnte Schönheitsfehler auf, dass die Temperaturverteilung bei  $y = \delta$  mit senkrechter Tangente einmündet.

Den Einfluss von  $\sqrt{(c_f/2)}$  bei der Eigenerwärmung zeigt Bild 9. Da die wirklichen Temperaturunterschiede  $T_s - T_{s\infty}$  gleich der

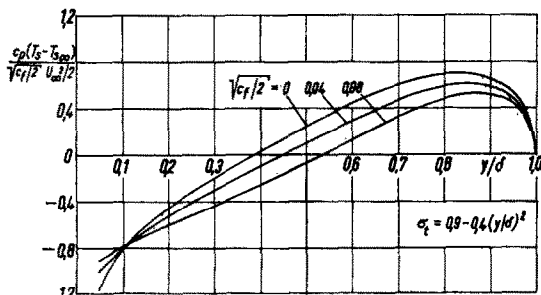


BILD 9. Verteilung der Gesamtemperatur durch Eigenerwärmung. Einfluss des örtlichen Reibungsbeiwertes.

dargestellten Verteilung, multipliziert mit  $\sqrt{(c_f/2)}$  sind, wird  $T_s - T_{s\infty}$  mit wachsender Reynoldszahl immer kleiner und verschwindet für  $Re \rightarrow \infty$ .

Weitere Beispiele für den Einfluss der  $\sigma_t$ -Verteilung auf  $(T - T_{\infty})/t_q$  und  $2c_p(T_s - T_{s\infty})/\sqrt{(c_f/2)U_{\infty}^2}$  geben die folgenden Bilder, Bilder 10 und 11 für  $\sigma_t = \text{konst.}$ , Bilder 12 und 13 für geradlinig auf  $\sigma_{t\infty} = 0,5$  abfallendes  $\sigma_t$ , Bilder 14 und 15 für geradlinig auf  $\sigma_{t\infty} = 1$  steigendes  $\sigma_t$ ; der Wandwert  $\sigma_{tw}$  ist Parameter.

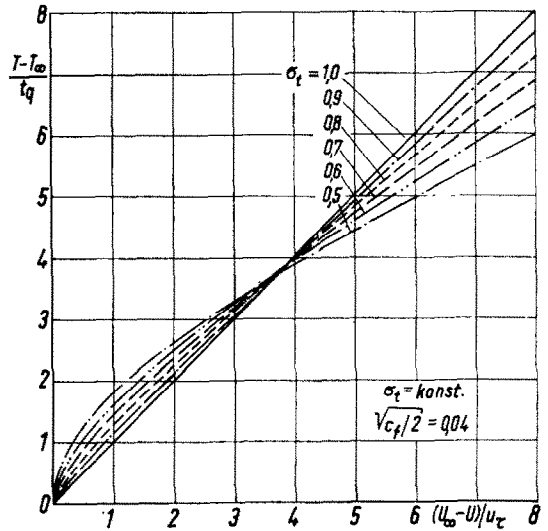


BILD 10. Äussere Temperaturverteilung bei Wärmeübertragung.

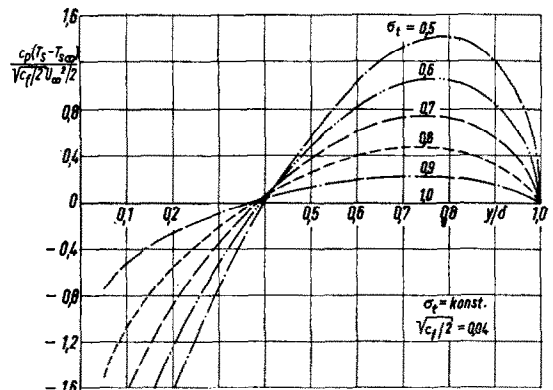


BILD 11. Verteilung der Gesamtemperatur durch Eigenerwärmung.

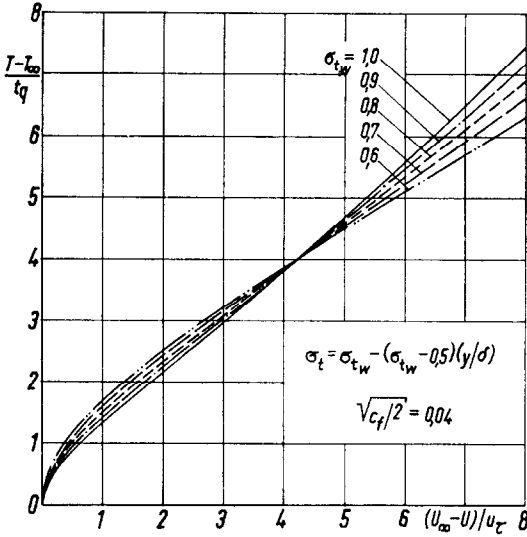


BILD 12. Äussere Temperaturverteilung bei Wärmeübertragung.  $\sigma_t$  geradlinig fallend auf  $\sigma_{t\infty} = 0,5$ .

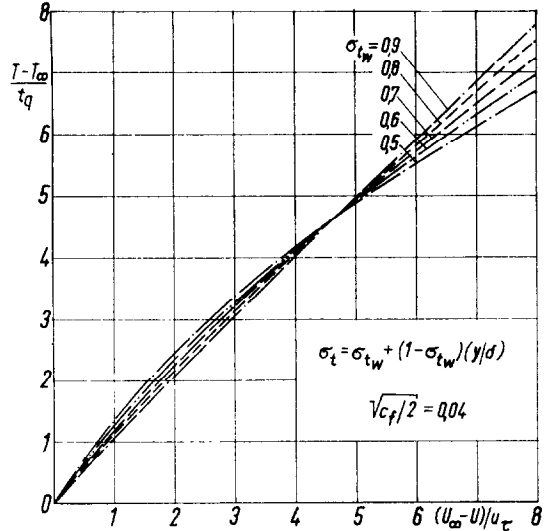


BILD 14. Äussere Temperaturverteilung bei Wärmeübertragung.  $\sigma_t$  geradlinig steigend auf  $\sigma_{t\infty} = 1$ .

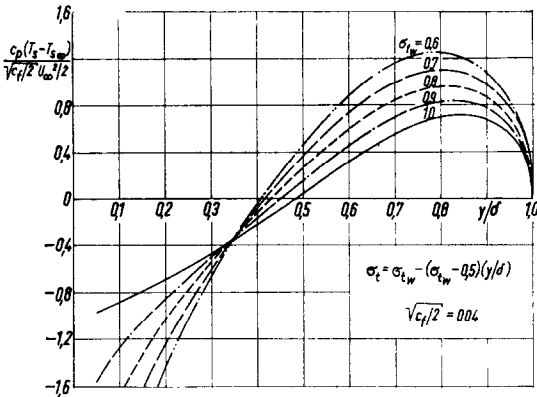


BILD 13. Verteilung der Gesamttemperatur durch Eigenerwärmung.  $\sigma_t$  geradlinig fallend auf  $\sigma_{t\infty} = 0,5$ .

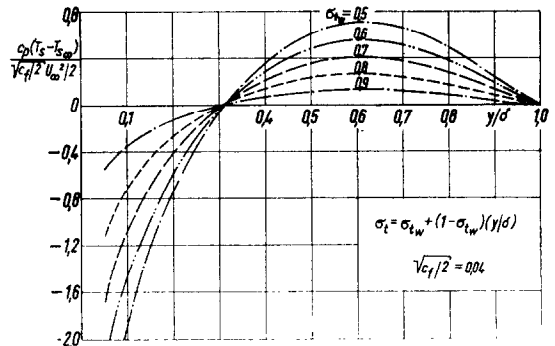


BILD 15. Gesamttemperaturverteilung durch Eigenerwärmung.  $\sigma_t$  geradlinig steigend auf  $\sigma_{t\infty} = 1$ .

**7. WÄRMEÜBERGANGSZAHL UND RECOVERY-FAKTOR**

Für  $y \rightarrow 0$  gehen die Funktionen  $A$  und  $B$  in (6.5) und (6.6) in die endlichen Werte  $A_o$  und  $B_o$  über. Aus (6.5) und (6.6) ergeben sich also für  $y \rightarrow 0$  die asymptotischen Gesetze

$$\frac{T - T_{\infty}}{t_q} = \sigma_{tw} \frac{U_{\infty} - U}{u_{\tau}} + A_o, \quad (7.1)$$

$$\frac{T - T_{\infty}}{u_{\tau} U_{\infty} / 2c_p} = \sigma_{tw} \frac{U_{\infty}^2 - U^2}{u_{\tau} U_{\infty}} + B_o. \quad (7.2)$$

Die Konstanten  $A_o$  und  $B_o$  sind in Bild 16a und b für verschiedene Verteilungen von  $\sigma_t$  über  $\sigma_{tw}$  aufgetragen. Durch Kombination von (7.1) mit dem Wandgesetz (5.2) kann  $T$  und  $U$  gleichzeitig eliminiert werden. Man erhält auf diese Weise eine Beziehung zwischen  $t_q$  und  $T_w - T_{\infty}$ . Führt man nun (5.1) wieder ein, so ergibt sich für die Wärmeübergangszahl  $St$  nach (2.3)

$$St = \frac{c_f/2}{\sigma_{tw} + \sqrt{(c_f/2)[A_o + (Pr - \sigma_{tw})a(Pr/\sigma_{tw})]}} \quad (7.3)$$

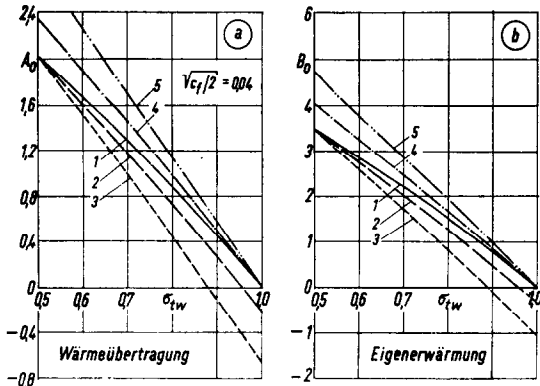


BILD 16a,b. Konstanten der asymptotischen Temperaturgesetze Gl. (7.1) und (7.2.).

Ganz analog kann man (7.2) mit (5.3) kombinieren und dabei gleichzeitig  $T$  und  $U^2$  eliminieren. So ergibt sich eine Formel für die Eigentemperatur  $T_e$ . Durch Einsetzen in (2.2) bekommt man für den Recovery-Faktor

$$r = \sigma_{tw} + \sqrt{(c_f/2)B_0} + \frac{c_f}{2}(Pr - \sigma_{tw})b \left( \frac{Pr}{\sigma_{tw}} \right). \quad (7.4)$$

Diese beiden wichtigen Größen, Wärmeübergangszahl und Recovery-Faktor, wurden für fünf verschiedene Verteilungen von  $\sigma_t$  berechnet und in Bild 17 als Funktion von  $\sigma_{tw}$  dargestellt. Bei der Wärmeübergangszahl wurde das Verhältnis  $St/(c_f/2)$  aufgetragen, das "Reynolds-Analogie-Faktor" genannt wird. Für  $Pr = 1$  und  $\sigma_t = 1$  wird  $St/(c_f/2) = 1$  und  $r = 1$ . Es zeigt sich in Bild 17 ein dominierender Einfluss von  $\sigma_{tw}$ , obwohl sich auch schon bei den Werten  $A_0$  und  $B_0$  eine starke Abhängigkeit von  $\sigma_{tw}$  ergibt. Wärmeübergangszahl und Recovery-Faktor werden also hauptsächlich

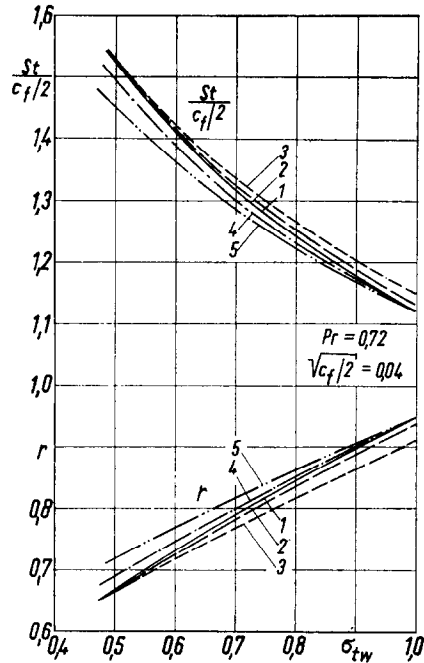


BILD 17. Reynolds-Analogie-Faktor und Recovery-Faktor. Einfluss der  $\sigma_t$ -Verteilung.

durch den Wandwert  $\sigma_{tw}$  bestimmt, der Verlauf von  $\sigma_t$  bei grösseren Wandabständen  $y$  bleibt demgegenüber relativ unbedeutend. Dies ist wohl das wichtigste Ergebnis der Untersuchungen. Bild 18 illustriert den Einfluss des örtlichen Reibungsbeiwertes an den  $\sigma_t$ -Verteilungen der Bilder 3 bis 8. Der Reibungsbeiwert und damit die Reynolds-Zahl beeinflussen den Recovery-Faktor und den Reynolds-Analogie-Faktor nur geringfügig, was nach der schon gezeigten Wirkung auf die Temperaturverteilungen nicht anders zu erwarten war.

Von den in Bild 17 angenommenen  $\sigma_t$ -Verteilungen liegt Nr. 2 den vorliegenden Versuchswerten am nächsten. Der Recovery-Faktor ist nach Messungen in breitem Bereich von Mach-Zahlen und Reynolds-Zahlen zu  $r \sim 0,88$  festgestellt worden (vgl. [10]). Der Reynolds-Analogie-Faktor dürfte im Mittel bei  $2St/c_f \sim 1,18$  liegen (vgl. Eckert [11], Reynolds, Kays, Kline [12]). Die vorliegenden Rechenergebnisse mit  $\sigma_{tw} \sim 0,9$  und Verteilung Nr. 2 stimmen mit diesen Angaben gut überein. Die Übertragbarkeit der Ludwigschen Versuchsergebnisse

$\sigma_t$ -Verteilungen bei Bild 16 und 17

Nr	Verlauf	$\sigma_t$
1	konstant	$\sigma_{tw}$
2	parabol. fallend	$\sigma_{tw} - (\sigma_{tw} - 0,5)(y/\delta)^2$
3	geradlinig fallend	$\sigma_{tw} - (\sigma_{tw} - 0,5)(y/\delta)$
4	parabol. steigend	$\sigma_{tw} + (1 - \sigma_{tw})(y/\delta)^2$
5	geradlinig steigend	$\sigma_{tw} + (1 - \sigma_{tw})(y/\delta)$

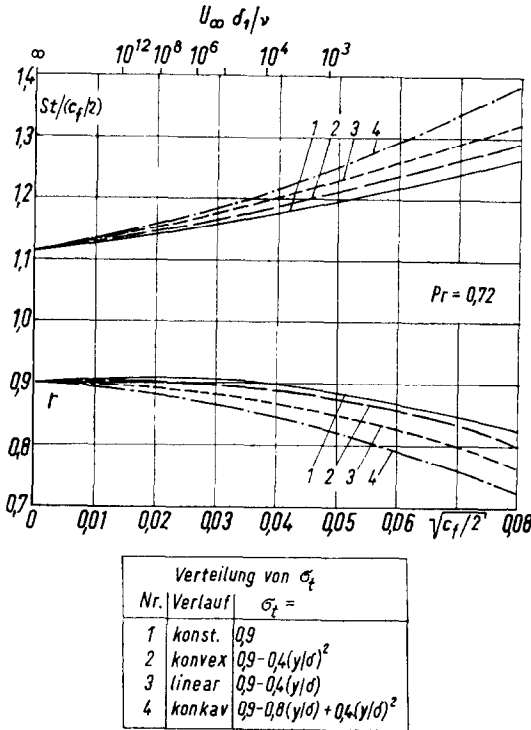


BILD 18. Reynolds-Analogie-Faktor und Recovery-Faktor. Einfluss des örtlichen Reibungsbeiwertes.

auf Grenzschichtströmungen wird hierdurch gestützt. Trotzdem sind weitere Informationen über die Verteilung von  $\sigma_t$  sehr erwünscht.

**8. TEMPERATURPROFILE BEI WÄRMEÜBERTRAGUNG**

Im Schrifttum findet man die Temperaturprofile gewöhnlich dimensionslos als  $(T_w - T)/(T_w - T_\infty)$  über  $y$  oder  $y/\sigma$  aufgetragen. Nachdem im vorigen Abschnitt eine Beziehung zwischen  $t_q$  und  $T_w - T_\infty$  hergeleitet worden ist, können die "Temperaturprofile" in dieser Form aus den äusseren Temperaturverteilungen nach Gl. (6.5) berechnet werden zu

$$\frac{T_w - T}{T_w - T_\infty} = 1 - \frac{\sqrt{(c_f/2)}}{\sigma_{tw} + \sqrt{(c_f/2)}[A_0 + (Pr - \sigma_{tw}) a(Pr/\sigma_{tw})]} \quad (8.1)$$

Derartige Profile sind in Bild 19 für konstantes,

in Bild 20 für geradlinig abfallendes und in Bild 21 für geradlinig steigendes  $\sigma_t$  dargestellt. Diese Auftragungen bringen im Prinzip nichts neues, sie zeigen nur die Ergebnisse in einer gewohnten Auftragung und ermöglichen deshalb leichter, die Unterschiede bei verschiedenen  $\sigma_t$ -Verteilungen abzuschätzen. In Bild 22 sind die Temperaturprofile für verschiedene  $\sigma_t$ -Verteilungen direkt miteinander verglichen. Diese Darstellung mag von Interesse sein, wenn man Temperatur- und Geschwindigkeitsverteilungen in einer Grenzschicht zu messen beabsichtigt

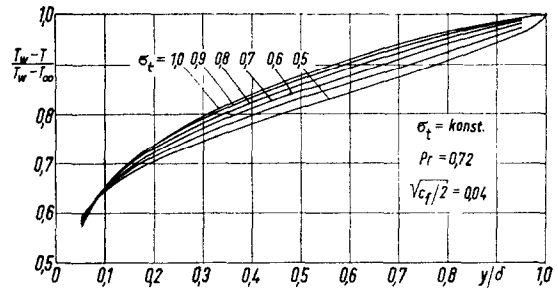


BILD 19. Temperaturprofile bei Wärmeübertragung.

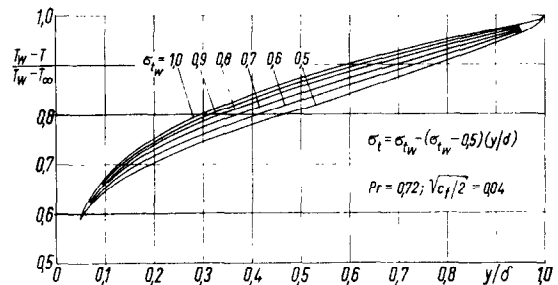


BILD 20. Temperaturprofile bei Wärmeübertragung.  $\sigma_t$  geradlinig fallend auf  $\sigma_{t\infty} = 0.5$ .

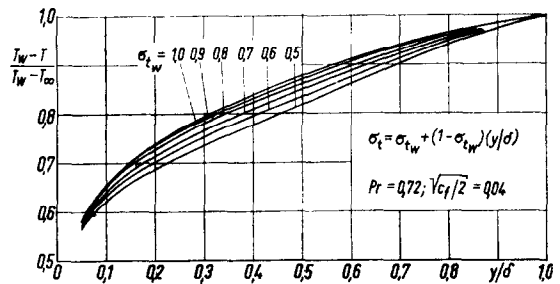


BILD 21. Temperaturprofile bei Wärmeübertragung.  $\sigma_t$  geradlinig steigend auf  $\sigma_{t\infty} = 1$ .

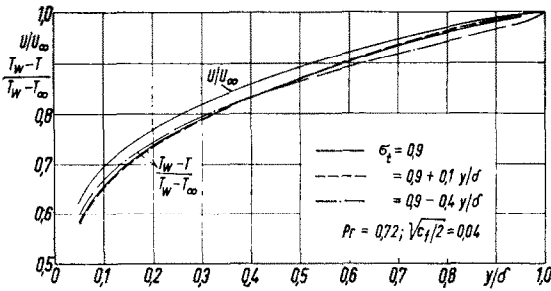


BILD 22. Geschwindigkeitsprofil und Temperaturprofile bei Wärmeübertragung.

mit dem Ziel, daraus die  $\sigma_t$ -Verteilung zu bestimmen. Die  $\sigma_t$ -Verteilung hat einen messbaren Einfluss auf die Temperaturprofile, doch muss man bei den Versuchen einige Sorgfalt aufwenden, wenn man reproduzierbare Ergebnisse für  $\sigma_t$  erhalten will.

## 9. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Es wurde der Einfluss der turbulenten Prandtl-Zahl (Verhältnis der Austauschkoefizienten für Impuls und Wärme) auf die Temperaturverteilungen in der turbulenten Grenzschicht an der ebenen Platte bei inkompressibler Strömung rechnerisch untersucht. Für die beiden Fälle "Eigenerwärmung" und "Wärmeübertragung bei konstanter Wandtemperatur" wurden die Wandgesetze und die Temperaturverteilungen im äusseren Grenzschichtteil bei beliebigen Verteilungen der turbulenten Prandtl-Zahl angegeben und Wärmeübergangszahl und Recovery-Faktor berechnet. Aus den durchgerechneten Beispielen lassen sich folgende Schlussfolgerungen ziehen:

1. Die turbulente Prandtl-Zahl  $\sigma_t$  beeinflusst die Wärmeübergangszahl und den Recovery-Faktor hauptsächlich durch ihre Werte nahe der Wand; der Verlauf von  $\sigma_t$  im grösserem Wandabstand hat verhältnismässig geringen Einfluss.
2. Auch die Temperaturverteilungen werden in erster Linie durch die Verteilung der turbulenten Prandtl-Zahl in der Nähe der Wand beeinflusst. Es ist deshalb wichtig, die Grösse von  $\sigma_t$  in Wandnähe ( $\sigma_{tw}$ ) einigermaßen genau zu kennen.

3. Der örtliche Reibungsbeiwert (die Reynolds-Zahl) hat geringen Einfluss auf Reynolds-Analogie-Faktor (Verhältnis der Wärmeübergangszahl/örtlicher Reibungsbeiwert), Recovery-Faktor und Temperaturverteilungen.
4. Der Vergleich der Rechenergebnisse mit experimentell gefundenen Werten des Recovery-Faktors und des Reynolds-Analogie-Faktors ergibt als Schätzung  $\sigma_{tw} \sim 0,9$ . Hiernach erscheint es zulässig, die von Ludwig aus Versuchen bei Rohrströmung ermittelte  $\sigma_t$ -Verteilung auf turbulente Grenzschichten anzuwenden.
5. Die verschiedenen  $\sigma_t$ -Verteilungen ergeben rechnerische Unterschiede von messbarer Grösse in den Temperaturverteilungen. Um die  $\sigma_t$ -Verteilung aus Versuchen zuverlässig ermitteln zu können, sind daher aber genaue Messungen der Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen nötig.

## 10. SCHRIFTTUM

1. H. LUDWIG, Bestimmung des Verhältnisses der Austauschkoefizienten für Wärme und Impuls bei turbulenten Grenzschichten, *Z. Flugwiss.* 4, 73-81 (1956).
2. D. S. JOHNSON, Velocity and temperature fluctuation measurements in a turbulent boundary layer downstream of a stepwise discontinuity in wall temperature, *J. Appl. Mech. Trans. ASME Ser. E.* 26, 325-336 (1959).
3. J. C. ROTTA, Turbulent boundary layers in incompressible flow, *Progr. Aero. Sci.* 2, 1-219 (1962).
4. P. S. KLEBANOFF, Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient. *NACA Tech. Rep.* 1247 (1955).
5. E. R. VAN DRIEST, The turbulent boundary layer with variable Prandtl number. H. Görtler und W. Tollmien: 50 Jahre Grenzschichtforschung. F. Vieweg u. Sohn, Braunschweig (1955).
6. J. C. ROTTA, Über den Einfluss der Machschen Zahl und des Wärmeübergangs auf das Wandgesetz turbulenter Strömung, *Z. Flugwiss.* 7, 264-274 (1959).
7. H. REICHARDT, Der Einfluss der wandnahen Strömung auf den turbulenten Wärmeübergang. *Mitt. MPI Ström. Forsch.* Nr. 3, 1-63 (1950).
8. H. B. SQUIRE, The friction temperature: A useful parameter in heat-transfer analysis. The Institution of Mechanical Engineers, General Discussion on Heat Transfer, 11th to 13th September, pp. 11-12 (1951).
9. E. R. VAN DRIEST, On turbulent flow near a wall, *J. Aero. Sci.* 23, 1007-1011 (1956).
10. G. B. SCHUBAUER and C. M. TCHEN, Turbulent flow. *High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion* 5, 75-195 (1959).
11. E. R. G. ECKERT, Survey on heat transfer at high

- speeds. Wright Air Development Center Tech. Rep. 54-70 (1954).
12. W. C. REYNOLDS, W. M. KAYS and S. J. KLINE, Heat transfer in the turbulent incompressible boundary layer. I—Constant wall temperature. *NASA Memo 12-1-58W*, 1-36 (1958).
13. D. COLES, The law of the wake in the turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.* **1**, 191-226 (1956).

#### ANHANG

Die Geschwindigkeitsverteilung der turbulenten Grenzschicht.

(a) Wandgesetz:

$$U = u_{\tau} \int_0^{y^*} \frac{2 dy^*}{1 + \sqrt{(1 + \{2\kappa y^*[1 - \exp(-y^*/A)]\})^2}}; \quad (\text{A.1})$$

diese Form hat van Driest [9] angegeben mit  $y^* = yu_{\tau}/\nu$ ,  $\kappa = 0,4$ ,  $A = 26$ . Für grosse  $y^*$  ergibt sich (4.1) mit  $C \sim 5,2$ .

(b) Geschwindigkeitsverlustgesetz:

$$F(y/\delta) = -(1/\kappa) \ln(y/\delta) + (II/\kappa)[2 - w(y/\delta)]. \quad (\text{A.2})$$

Die Wake-Function nach Coles [13] wurde durch

$$w(\eta) = 39\eta^3 - 125\eta^4 + 183\eta^5 - 133\eta^6 + 38\eta^7 \quad (\text{A.3})$$

angenähert.  $II = 0,375$ .

**Abstract**—The influence of the turbulent Prandtl number (ratio of the exchange coefficients for momentum and heat) on the temperature distributions in the turbulent boundary layer on a flat plate in incompressible flow is investigated theoretically. Two special cases are treated, viz. the case of "equilibrium wall temperature" and the case of "heat transfer at constant wall temperature". The laws of the wall and the temperature distributions in the outer part of the boundary layer are given for arbitrary distributions of the turbulent Prandtl number. The heat-transfer coefficients and the recovery factors are calculated. The results are discussed.

**Résumé**—On fait ici une étude théorique de l'influence du nombre de Prandtl (rapport des coefficients d'échange de chaleur et de quantité de mouvement) sur les distributions de températures dans la couche limite turbulente sur une plaque plane en écoulement incompressible. Deux cas particuliers sont traités: le cas d'une "température de paroi en équilibre" et le cas d'un échange thermique avec température de paroi constante". Les lois de distribution de températures dans la partie extérieure de la couche-limite sont données, en régime turbulent, pour des distributions arbitraires du nombre de Prandtl. Les coefficients d'échange thermique et les facteurs thermiques pariétaux sont calculés. Les résultats sont discutés.

**Аннотация**—Теоретически исследуется влияние турбулентного критерия Прандтля (отношение коэффициентов обмена тепла и количества движения) на распределение температуры в турбулентном пограничном слое на плоской пластине при течении несжимаемой жидкости. Рассмотрены два частных случая, а именно: случай «равновесной температуры стенки» и случай «теплообмена при постоянной температуре стенки». Для произвольных значений турбулентного критерия Прандтля даны законы распределения температуры во внешней части пограничного слоя. Рассчитаны коэффициенты теплообмена и восстановления. Обсуждены результаты.